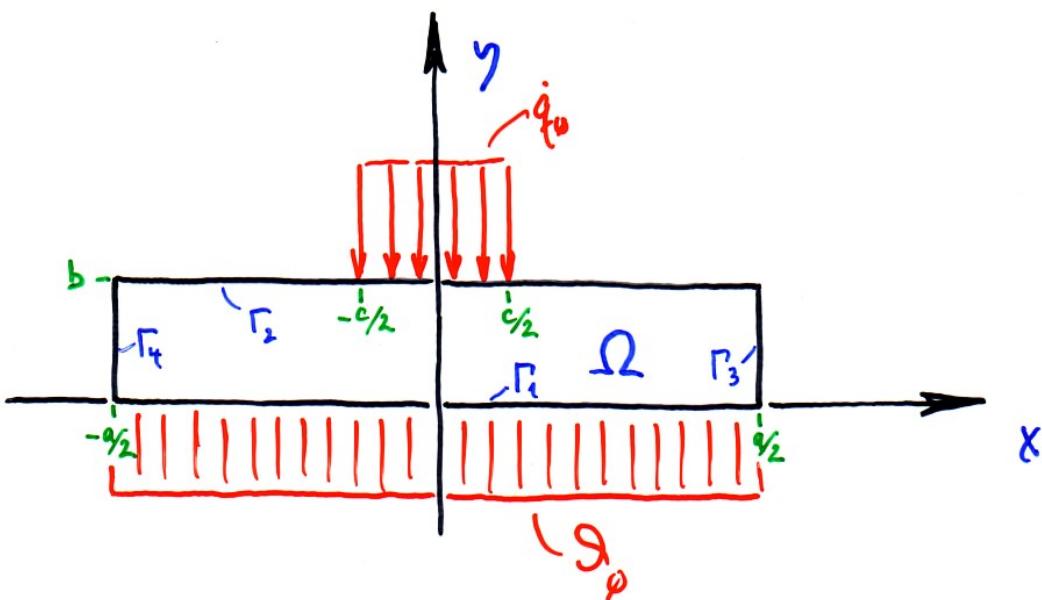


1.3 Einige Beispiele für analytische Lösungen

In den folgenden drei Beispielen geht es um stationäre Wärmeleitung ($\Omega = \mathbb{R}^2$) bzw. um instationäre Wärmeleitung ($\Omega = \mathbb{R}$, $t \in [0, \infty)$). In allen drei Fällen ist also $n=2$, und es existiert keine Wärmequelle/-senke ($\omega_\Omega = 0$).

Beispiel 1: Stationäre Wärmeleitung in der Deckplatte eines Kapillarwärmedampfers *)



Für stationäre Wärmeleitung mit $\lambda = \text{const.}$ erhält man entsprechend (1-8) für den ebenen Fall

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (\text{B1-1})$$

*) Das Problem stammt aus der Raumfahrt (Kühlung von Elektronikbauteilen).

gesucht wird die Lösung $\mathfrak{S}(x, y)$, die außer (B1-1) die folgenden RB'sen erfüllt:

$$\mathfrak{S}|_{\Gamma_1} = \mathfrak{S}(x, 0) = S_0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y}\Big|_{y=b} = -\frac{g_y(x, b)}{\lambda} = \begin{cases} \frac{g_0}{\lambda} & \text{für } -\frac{c}{2} \leq x \leq \frac{c}{2} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_3} = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x}\Big|_{x=\frac{a}{2}} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_4} = -\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x}\Big|_{x=-\frac{a}{2}} = 0.$$

Der Rand ist demnach stückweise glatt entsprechend

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4.$$

Wegen der konstanten Temperatur auf Γ_1 bleibt \mathfrak{S} sich an, die Substitution

$$u(x, y) := \mathfrak{S}(x, y) - S_0 \quad (\text{B1-2})$$

vorzunehmen. Damit erreicht man auf Γ_1 eine homogene DIRICHLET'sche RB. Somit lautet unserer

Randwertproblem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Bl-3})$$

mit

$$u|_{\Gamma_1} = u|_{y=0} = 0 \quad (\text{Bl-3.1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=b} = -\frac{\dot{q}_y(x, b)}{\lambda} \begin{cases} \frac{\dot{q}_y}{\lambda} & \text{für } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{Bl-3.2})$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_3} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\frac{a}{2}} = 0 \quad (\text{Bl-3.3})$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_4} = -\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=-\frac{a}{2}} = 0 \quad (\text{Bl-3.4})$$

Zur Lösung von (Bl-3) macht man den (auf BERNOULLI zurückgehenden) Separations- oder Produktansatz

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad *) \quad (\text{Bl-4})$$

den wir zunächst nach x bzw. y ableiten und in (Bl-3) einsetzen:

* im dreidimensionalen Fall: $u(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dx}{dx} Y, \quad ,$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 X}{dx^2} Y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = X \frac{dy}{dy}, \quad ,$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X \frac{d^2 Y}{dy^2}}$$

$$(B1-3) \rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} Y + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

Durch Umstellen gelingt es, die Abhängigkeit nach x von der nach y zu separieren:

$$\underbrace{-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{f(x)} = \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{g(y)} \equiv \text{const.} =: k^2$$

Damit erhält man anstelle der partiellen Dgl. (B1-3) nun zwei gewöhnliche Dgl.'en

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} - k^2 Y = 0$$

mit den Lösungen

$$X(x) = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx),$$

$$Y(y) = c_3 \sinh(ky) + c_4 \cosh(ky).$$

Durch Einsetzen dieser in den Ansatz (B1-4) erhält man

eine(!) Lösung der LAPLACE-Gleichung (B1-3) zu

$$u_1(x,y) = (c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx)) \cdot \\ \cdot (c_3 \sinh(ky) + c_4 \cosh(ky)).$$

Weitere Lösungen sind offensichtlich

$$u_2(x,y) = c_5 x \quad \text{und} \quad u_3(x,y) = c_6 y,$$

da deren 2. Ableitungen verschwinden. Wegen der Linearität der LAPLACE-Gleichung gilt das Superpositionsprinzip, d.h.

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) + u_3(x,y).$$

Die allg. Lösung von (B1-3) lautet somit

$$u(x,y) = (c_3 \sinh(ky) + c_4 \cosh(ky)) c_1 \sin(kx) + \\ + (c_3 \sinh(ky) + c_4 \cosh(ky)) c_2 \cos(kx) + \\ + c_5 x + c_6 y. \quad (B1-5)$$

Im Gegensatz zur Lösung von gewöhnlichen Dgl'n, bei denen die Erstellung der „Lösung“ die Hauptarbeit darstellt, und das Einsetzen von AB/RB'en keine Formssache*) ist, sieht die Sache hier anders aus: Die Probleme gehen jetzt los!

* Bei RB'en kann es passieren, daß keine Lösung existiert!

richtig los! Dann wir müssen entsprechend (B1-3.1, ..., 4) Konstantorläufe durch trigonometr./hyperbol. Funktionen ausdrücken. Dabei sind homogene RB's noch am einfachsten.

$$u|_{\Gamma_1} = 0$$

(B1-3.1)

$$u|_{y=0} = 0$$

$$c_4 (c_1 \sin[kx] + c_2 \cos[kx]) + c_5 x = 0$$

$$\Rightarrow c_4 = c_5 = 0$$

Damit erhält man

$$u(x, y) = (c_1 \sin[kx] + c_2 \cos[kx]) c_3 \sinh[ky] + c_6 y ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (c_1 k \cos[kx] - c_2 k \sin[kx]) c_3 \sinh[ky] .$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_3} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_4} = 0}$$

(B1-3.3/4)

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pm\frac{a}{2}} = 0$$

$$(c_1 k \cos[\pm k \frac{a}{2}] - c_2 k \sin[\pm k \frac{a}{2}]) c_3 \sinh[ky] = 0$$

Aufgrund der Symmetrie, die das RWP bezüglich der y -Achse besitzt, muß $u(x,y)$ hinsichtlich der x -Abhängigkeit eine gerade Funktion sein, d.h.

$$u(x,y) = u(-x,y).$$

Daher können in (B1-5) nur \cos -Terme, nicht aber \sin -Terme auftreten. Damit ist

$$c_1 = 0$$

zu setzen. Aus (B1-3.3(4)) verbleibt noch die Forderung

$$\sin\left[\pm k \frac{\pi}{2}\right] = 0.$$

Bekanntlich hat diese Gleichung unendlich viele Lösungen:

$$k_y = 2\pi \frac{v}{a} \quad \text{mit } v \in \mathbb{N}. \quad (\text{B1-6})$$

Das hat zur Folge, daß in $u(x,y)$ nicht nur in allen Fällen k gegen k_y ausgetauscht werden muß. Es müssen für diese Terme noch Linear kombinationen aufgestellt werden, die der Lösungsmöglichkeit von k gerecht werden. Man ersetzt also folgendermaßen:

$$c_2 c_3 \cos[kx] \sinh[ky] \rightarrow \sum_{v=1}^{\infty} A_v \cos[k_v x] \sinh[k_v y].$$

Die Konstanten c_1, c_3 gehen also in den λ_v auf!

Das (vorläufige) Ergebnis lautet somit

$$u(x,y) = \sum_{v=1}^{\infty} A_v \cos[k_v x] \sinh[k_v y] + c_2 y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{v=1}^{\infty} A_v k_v \cos[k_v x] \cosh[k_v y] + c_2. \quad (\text{Bl-2})$$

Wir berücksichtigen nun die letzte, noch verbliebene, RB:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = - q_y(x,b) \quad (\text{Bl-3.2})$$

Wegen der Sprungfunktion

$$q_y(x,b) = \begin{cases} -q_0 & \text{für } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

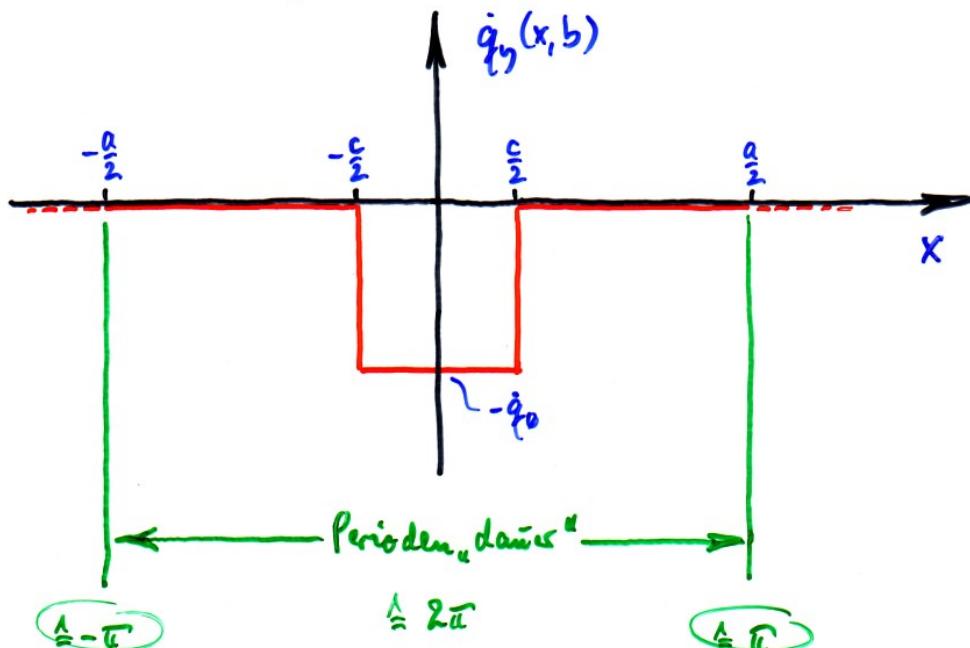
muß diese RB in eine FOURIER-Reihe (periodisch bezügl. a)

$$q_y(x,b) = \frac{q_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} \left(\alpha_v \cos\left[2\pi \frac{x}{a}\right] + \beta_v \sin\left[2\pi \frac{x}{a}\right] \right)$$

entwickelt werden. Dabei ist sofort klar, daß sämtliche

$$\beta_v = 0 \quad \text{für } \forall v \in \mathbb{N}$$

Stein müssen, weil die FOURIER-Entwicklung einer geraden Funktion nur aus \cos -Termen besteht. Offensichtlich ist das bei $q_y(x, b)$ der Fall (wegen der Achsensymmetrie um die Ordinate):



Wir müssen also mit die α_p berechnen: Es ist

$$\alpha_p = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} q_y(x, b) dx .$$

Da $q_y(x, b) = 0$ ist im Intervall $[-\frac{a}{2}, -\frac{c}{2}]$ und $(\frac{c}{2}, \frac{a}{2})$, verläuft sich die Integration zu

$$\alpha_p = \frac{2}{a} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} (-q_0) dx = -2q_0 \frac{c}{a} .$$

Entsprechend erhalten wir für $\nu \neq 0$

$$\alpha_\nu = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} q_0(x, b) \cos [2\pi\nu \frac{x}{a}] dx$$

$$= - \frac{2q_0}{a} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \cos [2\pi\nu \frac{x}{a}] dx$$

$$= - \frac{2q_0}{a} \frac{x}{2\pi\nu} \left(\underbrace{\sin [2\pi\nu \frac{c}{2a}] - \sin [-2\pi\nu \frac{c}{2a}]}_{+ \sin [2\pi\nu \frac{c}{2a}]} \right)$$

$$= - 2 \frac{q_0}{a} \frac{\sin [\pi\nu \frac{c}{a}]}{\nu}$$

und somit (B1-8)

$$q_y(x, b) = -q_0 \left(\frac{c}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin [\pi n \nu \frac{c}{a}]}{\nu} \cos [2\pi n \nu \frac{x}{a}] \right).$$

für die RB

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b} = - \frac{q_y(x, b)}{\lambda} \quad (B1-3.2)$$

Setzen wird nun auf der linken Seite (B1-7) ein unter

Berücksichtigung von (Bl-6) und $y=b$. Auf der rechten Seite wird def. geln (Bl-8) eingesetzt. Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{a} \sum_{v=1}^{\infty} A_v v \cosh\left[2\pi v \frac{b}{a}\right] \cos\left[2\pi v \frac{x}{a}\right] + c_0 &= \\ = \frac{q_0}{\lambda} \frac{c}{a} + \frac{2}{\pi} \frac{q_0}{\lambda} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin\left[\pi v \frac{c}{a}\right]}{v} \cos\left[2\pi v \frac{x}{a}\right]. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{a} A_v v \cosh\left[2\pi v \frac{b}{a}\right] &= \frac{2}{\pi} \frac{q_0}{\lambda} \frac{\sin\left[\pi v \frac{c}{a}\right]}{v} \\ c_0 &= \frac{q_0}{\lambda} \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Dann erhält man außer c_0 noch die Koeffizienten

$$A_v = \frac{q_0}{\lambda} \frac{a}{\pi^2 v^2} \frac{\sin\left[\pi v \frac{c}{a}\right]}{\cosh\left[2\pi v \frac{b}{a}\right]}.$$

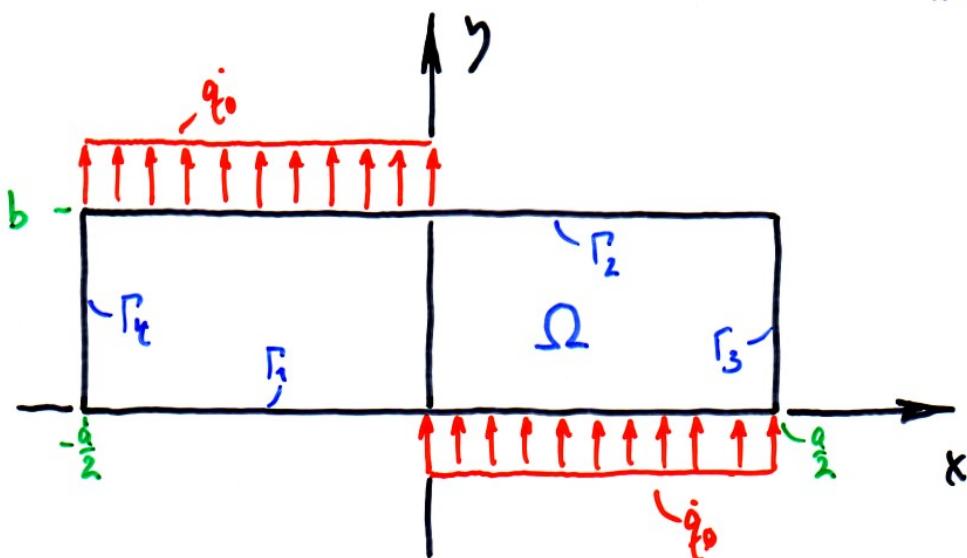
Die Lösung lautet nun (vgl. Bl-2):

$$S(x, y) = \frac{q_0}{\lambda} \left[\frac{c}{a} y + \frac{a}{\pi^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin\left[\pi v \frac{c}{a}\right]}{v^2} \frac{\sinh\left[2\pi v \frac{y}{a}\right]}{\cosh\left[2\pi v \frac{b}{a}\right]} \cos\left[2\pi v \frac{x}{a}\right] \right] + S_p$$

für $\forall (x, y) \in \Omega$.

(Bl-9)

Beispiel 2: Stationäre Wärmeleitung (NEUMANN'sches Problem)



Auch hier handelt es sich um stationäre Wärmeleitung mit $\lambda = \text{const.}$ für den ebenen Fall

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{B2-1})$$

mit den (NEUMANN'schen) RB'en

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = - \frac{q_0(x, 0)}{\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{a}{2} \leq x \leq 0 \\ \frac{q_0}{\lambda} & \text{für } 0 < x \leq \frac{a}{2}, \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=b} = - \frac{q_0(x, b)}{\lambda} = \begin{cases} -\frac{q_0}{\lambda} & \text{für } -\frac{a}{2} \leq x < 0 \\ 0 & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{a}{2}, \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma_3} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=\frac{a}{2}} = 0, \quad (\text{B2-2.1/2/3})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{R_4} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{a}{2}} = 0 . \quad (B2-2.4)$$

Mit dem üblichen Produktansatz (B1-4) kommt man auf die allg. Lösung

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & (c_3 \sinh[ky] + c_4 \cosh[ky]) c_1 \sin[kx] + \\ & + (c_3 \sinh[ky] + c_4 \cosh[ky]) c_2 \cos[kx] + \\ & + c_5 x + c_6 y + c_7 , \end{aligned} \quad (B2-3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = & (c_3 \sinh[ky] + c_4 \cosh[ky]) c_1 k \cos[kx] - \\ & - (c_3 \sinh[ky] + c_4 \cosh[ky]) c_2 k \sin[kx] + c_5 . \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{R_3} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{R_4} = 0 \quad (B2-2.3/4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0$$

$$\begin{aligned} & (c_3 \sinh[ky] + c_4 \cosh[ky]) c_1 k \cos[\pm k \frac{a}{2}] - \\ & - (c_3 \sinh[ky] + c_4 \cosh[ky]) c_2 k \sin[\pm k \frac{a}{2}] + c_5 = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow c_2 = c_5 = 0 , \quad \cos[\pm k \frac{a}{2}] = 0$$

Da die Nullstellen des Cosinus der gleichz.

$$\cos\left[\pm\left(\nu\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 0 \quad \text{für } \forall \nu \in \mathbb{N}$$

genügen, erhält man auch in diesem Beispiel ein k_ν gemäß

$$\pm k_\nu \frac{a}{2} = \pm \left(\nu\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

bzw.

$$k_\nu = (2\nu - 1) \frac{\pi}{a} \quad \text{mit } \nu \in \mathbb{N}. \quad (B2-4)$$

Damit ergibt sich

$$S(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_\nu \sinh[k_\nu y] + B_\nu \cosh[k_\nu y]) \sin[k_\nu x] + c_6 y + c_7,$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = c_6 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_\nu \cosh[k_\nu y] + B_\nu \sinh[k_\nu y]) k_\nu \sin[k_\nu x].$$

Die Konstanten c_6, c_7 sind in den A_ν, c_6, c_7 in den B_ν aufgegangen!

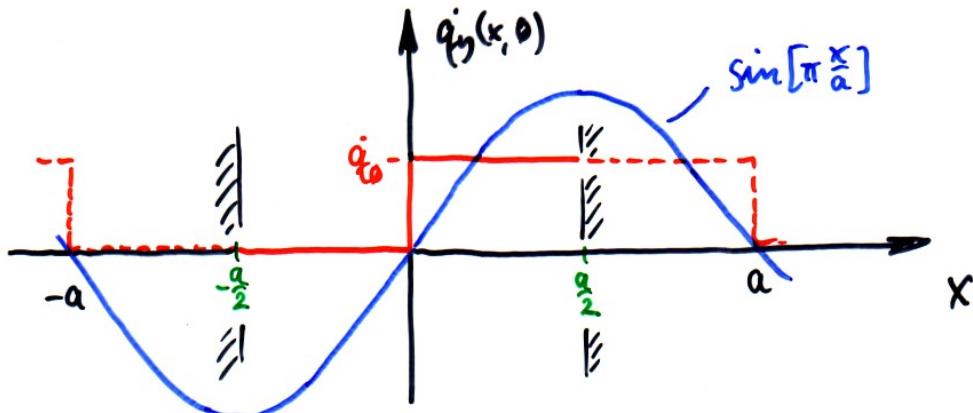
$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{y=0} = - \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{q_y(x, 0)}{\lambda}} \quad (B2-2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{y=0} &= c_6 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_\nu \cosh[k_\nu \cdot 0] + B_\nu \sinh[k_\nu \cdot 0]) k_\nu \sin[k_\nu x] \\ &= c_6 + \frac{\pi}{a} \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu (2\nu - 1) \sin\left[(2\nu - 1)\pi \frac{x}{a}\right] \end{aligned} \quad (B2-5)$$

Wegen der Sprungfunktion

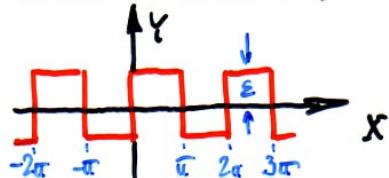
$$q_0(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{a}{2} \leq x \leq 0 \\ \frac{q_0}{2} & \text{für } 0 < x \leq \frac{a}{2} \end{cases}$$

Muß die RB in eine FOURIER-Reihe entwickelt werden:



Von einschlägigen Literatur entnimmt man kurzhand:

$$Y(x) = \frac{4\varepsilon}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin[(2v-1)x]}{2v-1}$$



Durch Vergleich erhält man: $\pi \hat{=} a$, $\varepsilon \hat{=} \frac{q_0}{2}$. Mit der daraus resultierenden Ersetzung

$$x \rightarrow \pi \frac{x}{a}, \quad Y \rightarrow q_0(x, 0) - \frac{q_0}{2}$$

kommt man auf

$$q_0(x, 0) - \frac{q_0}{2} = \frac{4}{\pi} \frac{q_0}{2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin[(2v-1)\pi \frac{x}{a}]}{2v-1}$$

bzw.

$$\dot{q}_0(x, \theta) = \dot{q}_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin[(2v-1)\pi \frac{x}{a}]}{2v-1} \right). \quad (B2-6)$$

Wir setzen nun (B2-5) und (B2-6) in (B2-2.1) ein und machen den obligatorischen Koeffizientenvergleich:

$$-c_0 - \frac{\pi}{a} \sum_{v=1}^{\infty} A_v (2v-1) \sin[\dots] = \frac{\dot{q}_0}{2\lambda} + \frac{2\dot{q}_0}{\pi \lambda} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2v-1} \sin[\dots].$$

Man erhält

$$c_0 = -\frac{\dot{q}_0}{2\lambda},$$

$$A_v = -\frac{\dot{q}_0}{\lambda} \frac{2}{\pi^2} \frac{a}{(2v-1)^2} = -\frac{\dot{q}_0}{\lambda} \frac{2}{a} \frac{1}{k_v^2}.$$

Das (vorläufige) Ergebnis lautet nun

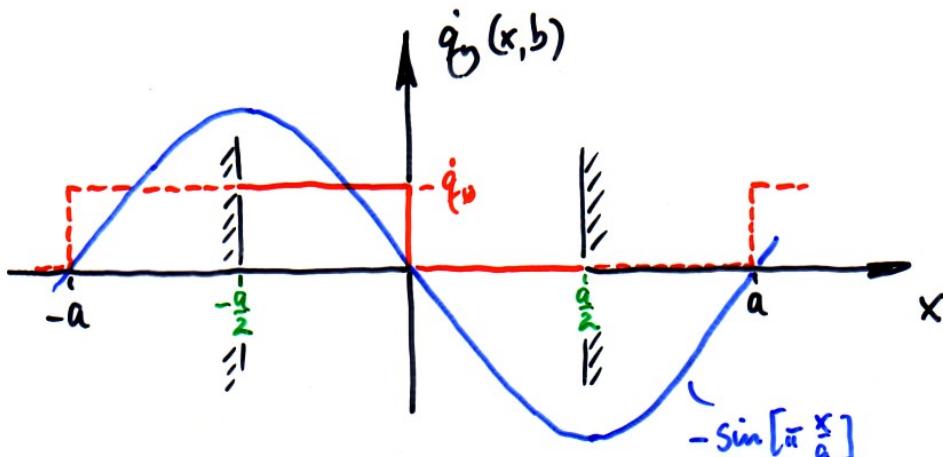
$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(x, y) &= \sum_{v=1}^{\infty} \left(-\frac{\dot{q}_0}{\lambda} \frac{2}{a} \frac{\sinh[k_v y]}{k_v^2} + B_v \cosh[k_v y] \right) \sin[k_v x] - \\ &\quad - \frac{\dot{q}_0}{2\lambda} y + c_?$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial y} &= \sum_{v=1}^{\infty} \left(-\frac{\dot{q}_0}{\lambda} \frac{2}{a} \frac{\cosh[k_v y]}{k_v} + B_v k_v \sinh[k_v y] \right) \sin[k_v x] - \\ &\quad - \frac{\dot{q}_0}{2\lambda}$$

$$\left. \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = \left. \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial y} \right|_{y=b} = - \frac{\dot{q}_y(x, b)}{\lambda} \quad (\text{B2-2.2})$$

$$\left. \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial y} \right|_{y=b} = \sum_{v=1}^{\infty} \left(- \frac{\dot{q}_0}{\lambda} \frac{z}{a} \frac{\cosh[k_v b]}{k_v} + B_v k_v \sinh[k_v b] \right) \sin[k_v x] - \frac{\dot{q}_0}{2\lambda} \quad (\text{B2-7})$$

Zu RB (B2-2.2) stellt das Spiegelbild von RB (B2-2.1) bezüglich der Ordinate dar:



Man braucht also in (B2-6) die Ersetzung

$$x \rightarrow -x$$

vorzunehmen und erhält wegen

$$\sin[-x] = -\sin[x]$$

Sofort die FOURIER-Entwicklung von (B2-2.2):

$$\begin{aligned} \dot{q}_y(x, b) &= \dot{q}_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin[(2v-1)\pi \frac{x}{a}]}{2v-1} \right) \\ &= \dot{q}_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{a} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin[k_v x]}{k_v} \right). \quad (\text{B2-8}) \end{aligned}$$

Wir setzen nun wiederum (B2-7) und (B2-8) in (B2-2.2) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{\infty} \left(-\frac{\dot{q}_0}{\lambda} \frac{2}{a} \frac{\cosh[k_v b]}{k_v} + B_v k_v \sinh[k_v b] \right) \sin[k_v x] - \frac{\dot{q}_0}{2\lambda} = \\ = -\frac{\dot{q}_0}{2\lambda} + \frac{\dot{q}_0}{\lambda} \frac{2}{a} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin[k_v x]}{k_v} \\ B_v = \frac{\dot{q}_0}{\lambda} \frac{2}{a} \frac{1 + \cos[k_v b]}{\sinh[k_v b]} \end{aligned}$$

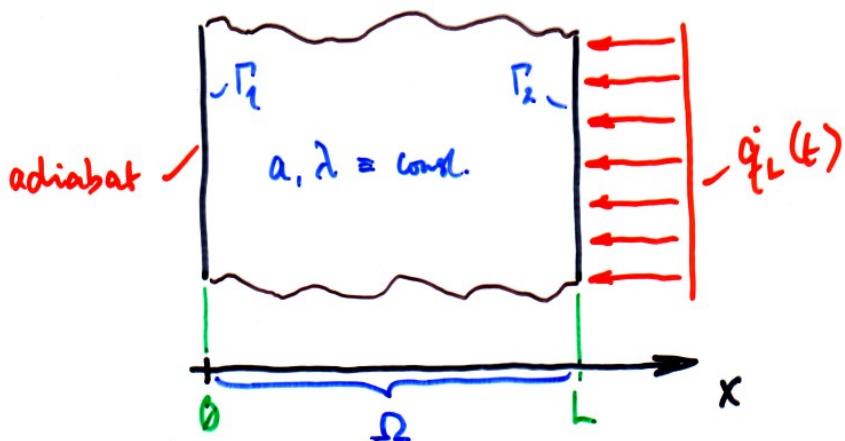
Wie man sich an dem vorläufigen Ergebnis für $\mathcal{D}(x, y)$ nicht überzeugt, ist $c_0 = \mathcal{D}(0, 0) =: \mathcal{D}_0$. Die Lösung lautet nun:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(x, y) = -\frac{\dot{q}_0}{\lambda} \left[\frac{2}{a} \sum_{v=1}^{\infty} \left(\sinh[k_v y] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1 + \cosh[k_v b]}{\sinh[k_v b]} \cosh[k_v y] \right) \frac{\sin[k_v x]}{k_v^2} \right] + \mathcal{D}_0 \end{aligned}$$

für $\forall (x, y) \in \Omega$ mit $k_v = (2v-1)\frac{\pi}{a}$

(B2-9)

Beispiel 3: Instationäre Wärmeleitung mit zeitabhängiger (Neumann'scher) RB



Hier handelt es sich um ein Rand-/Anfangswertproblem mit $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$. Nach (1-3) gilt für den (räumlichen) eindimensionalen Fall

$$a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (\text{B3-1})$$

mit den (Neumann'schen) RB'en

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma_U} = - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B3-2.1})$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma_L} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=L} = - \frac{q_i(L, t)}{\lambda} = \frac{\dot{q}_i(t)}{\lambda} \quad (\text{B3-2.2})$$

und das AB

$$\vartheta(x, \theta) = \vartheta_0 = \text{const.} \quad \text{für } \forall x \in \Omega. \quad (B3-2.3)$$

gesucht wird die Lösung $\vartheta(x, t)$, die die Differentialgleichung (B3-1) und die RB'sen (B3-2.1/2) sowie das AB (B3-2.3) erfüllt.

Das hier vorgestellte RWP stammt aus der Raumfahrt und bezieht sich auf die Aufheizung der Außenwand eines Wiedereintrittskörpers (ohne Abkühlung). Der Wandwärmestrom $q_L(t)$ stellt somit den Wärmeeintrag während der Wiedereintrittsphase dar. Er sei angesetzt in Gestalt einer zeitl. Gaußs-Verteilung entsprechend

$$q_L(t) = c_1 \exp\left[-c_2\left(t - \frac{T}{2}\right)^2\right] - c_3 \quad (B3-3)$$

für $t \in [0, T]$ mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^+$. Daraufge folgt wird die Lösung $\vartheta(x, t)$ im Bereich

$$\Omega \times (0, T)$$

gesucht. Dieser erfolgt in zwei Schritten:

- 1) Lösung des vereinfachten Problems mit $q_L(t) \equiv q_{L0} = \text{const.}$,
- 2) Erweiterung der Lösung auf die zeitabhängige RB mithilfe der Theorie von Duhamel.

1) Lösung $S^*(x,t)$ für $\dot{q}_L(t) = \dot{q}_{L0}$

Wir machen wieder den bewährten Produktansatz

$$S(x,t) = P(x) \cdot R(t) \quad (B3-4)$$

und finden

$$\frac{\partial S}{\partial t} = P \frac{dR}{dt}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{d^2P}{dx^2} R.$$

Einsetzen in (B3-1) liefert

$$\underbrace{\frac{1}{P} \frac{d^2P}{dx^2}}_{f(x)} = \underbrace{\frac{1}{aR} \frac{dR}{dt}}_{g(t)} \equiv \text{const.} =: -k^2$$

und weiterhin

$$\frac{dR}{dt} + \alpha k^2 R = 0, \quad \frac{d^2P}{dx^2} + k^2 P = 0$$

mit den Lösungen

$$R(t) = c_1 \exp[-\alpha k^2 t],$$

$$P(x) = c_2 \sin(kx) + c_3 \cos(kx).$$

Einsetzt in (B3-4) ergibt sich

$$\mathfrak{I}_1(x,t) = c_1 \exp[-\alpha k^2 t] \left(c_2 \sin[kx] + c_3 \cos[kx] \right).$$

Erfahrungsgemäß muß man für die AB/RB'chen FOURIER-Entwicklungen durchführen. Es ist daher praktisch, sofern zu

$$\mathfrak{I}_{1,\infty}(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \exp[-\alpha k_j^2 t] \left(A_j \sin[k_j x] + B_j \cos[k_j x] \right)$$

überzugehen. Die Konstanten $c_1 c_2$ und c_3 sind dabei in den A_j bzw. B_j aufgegangen. Wie man sich leicht überzeugt, sind auch

$$\mathfrak{I}_2(x,t) = C(x^2 + 2at)$$

und

$$\mathfrak{I}_3(x,t) = Dx + E$$

lösen von (B3-1). Durch Superposition erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}^*(x,t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \exp[-\alpha k_j^2 t] \left(A_j \sin[k_j x] + B_j \cos[k_j x] \right) + \\ &\quad + C(x^2 + 2at) + Dx + E \end{aligned} \tag{B3-5}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{I}^*}{\partial x} &= \sum_{j=1}^{\infty} k_j \exp[-\alpha k_j^2 t] \left(A_j \cos[k_j x] - B_j \sin[k_j x] \right) + \\ &\quad + 2Cx + D. \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathfrak{F}^*}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = 0}$$

(B3-2.1)

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^*}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} k_v \exp[-\alpha k_v^2 t] \left(A_v \cos(k_v \cdot 0) - B_v \sin(k_v \cdot 0) \right) + 2C \cdot 0 + D = 0$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} A_v k_v \exp[-\alpha k_v^2 t] + D = 0$$

$$\Rightarrow D = 0,$$

$$A_v = 0 \quad \text{für } \forall v \in \mathbb{N}.$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathfrak{F}^*}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = \frac{\dot{q}_L(t)}{\lambda} = \frac{\dot{q}_{L0}}{\lambda}}$$

(B3-2.2)

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^*}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{\dot{q}_{L0}}{\lambda}$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} k_v \exp[-\alpha k_v^2 t] \left(A_v \cos(k_v L) - B_v \sin(k_v L) \right) + 2CL + D = \frac{\dot{q}_{L0}}{\lambda}$$

$$- \sum_{v=1}^{\infty} B_v k_v \exp[-\alpha k_v^2 t] \sin(k_v L) + 2CL = \frac{\dot{q}_{L0}}{\lambda}$$

$$\rightarrow \sin(k_v L) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \boxed{k_v = \frac{v\pi}{L}} \quad (\text{B3-6})$$

$$\rightarrow C = \frac{\dot{q}_{10}}{2\lambda L}.$$

Die (verkürzte) Lösung ist dann

$$S^*(x, t) = \sum_{v=1}^{\infty} B_v \exp[-\alpha k_v^2 t] \cos(k_v x) + \frac{\dot{q}_{10}}{\lambda L} \left(\frac{x^2}{2} + \alpha t \right) + E.$$

$$S^*(x, 0) = S_0 \quad (B3-2.3)$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} B_v \exp[-\alpha k_v^2 \cdot 0] \cos(k_v x) + \frac{\dot{q}_{10}}{\lambda L} \left(\frac{x^2}{2} + \alpha \cdot 0 \right) + E = S_0$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} B_v \cos(k_v x) + \frac{\dot{q}_{10} L}{\lambda} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 + E = S_0$$

Der quadratische Term muß hier in eine FOURIER-Reihe entwickelt werden! Mit

$$\left(\frac{x}{L} \right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v^2} \cos(k_v x)$$

erhalten wir

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left(B_v + \frac{\dot{q}_{10} L}{\lambda} \frac{1}{2} \frac{4}{\pi^2} \frac{(-1)^v}{v^2} \right) \cos(k_v x) + E + \frac{\dot{q}_{10} L}{\lambda} \frac{1}{2} \frac{1}{3} = S_0.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$B_y + \frac{\dot{q}_{L0} L}{\lambda} \frac{2}{\pi^2} \frac{(-1)^y}{y^2} = 0,$$

$$E + \frac{\dot{q}_{L0} L}{\lambda} \frac{1}{6} = g_0.$$

Dann erhält man

$$B_y = -\frac{\dot{q}_{L0} L}{\lambda} \frac{2}{\pi^2} \frac{(-1)^y}{y^2}, \quad E = g_0 - \frac{1}{6} \frac{\dot{q}_{L0} L}{\lambda}.$$

Die Lösung für konstante RB $\dot{q}_L(t) = \dot{q}_{L0}$ lautet somit

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(x, t) &= \frac{\dot{q}_{L0} L}{\lambda} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{(-1)^y}{y^2} \exp[-\alpha k_y^2 t] \cos[k_y x] \right) + \\ &\quad + \frac{\dot{q}_{L0}}{L} \frac{\alpha}{\lambda} t + g_0 \end{aligned} \quad (B3-7)$$

$$\text{für } \forall (x, t) \in \Omega \times (0, T) \quad \text{mit } k_y = \frac{\pi y}{L}.$$

Vgl. hierzu [1.6], Chap. 15 § 3.8, S. 112 \rightarrow gl. (3)! Dort findet man auch eine Darstellung der Lösung mit Hilfe der „Errorfunktion“, d.h. des GAUSS'schen Fehlerintegrals.

In folgenden wird der Wärmestrom

$$\dot{q}_x^*(x, t) = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} [\mathfrak{F}(x, t)] \quad \text{für } \forall (x, t) \in \Omega \times (0, T)$$

benötigt. Mit (B3-7) erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{q}_x^*(x,t) &= -\dot{q}_{L0} + \left(\frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v} \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{=k_v} \exp[-ak_v^2 t] \sin[k_v x] \right) \\ &= -\dot{q}_{L0} \left(\frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v} \exp[-ak_v^2 t] \sin[k_v x] \right)\end{aligned}$$

und damit die „normierte Sprungantwort“ für $\dot{q}_L(t) = \dot{q}_{L0}$

$$F^*(x,t) := \frac{\dot{q}_x^*(x,t)}{\dot{q}_{L0}} \quad (\text{B3-8})$$

$$= -\frac{x}{L} - \frac{2}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v} \exp[-ak_v^2 t] \sin[k_v x].$$

2) Lösung $\vartheta(x,t)$ für $\dot{q}_L(t)$ nach (B3-3)

Nach dem Theorem von DUITAMEL ist

$$\dot{q}_x(x,t) = \int_0^t \underbrace{\frac{d\dot{q}_L}{dt} F^*(x,t-\tau)}_{\substack{\text{(Einheits-)Sprungantwort} \\ \text{Gewichtung}}} d\tau. \quad (\text{B3-9})$$

Einsetzen von (B3-8) in (B3-9) liefert

$$\dot{q}_x(x,t) = \int_0^t \frac{d\dot{q}_L}{dt} \left(-\frac{x}{L} - \frac{2}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v} \exp[-ak_v^2(t-\tau)] \sin[k_v x] \right) d\tau$$

$$= -\frac{x}{L} \underbrace{\int_0^t \frac{d\dot{q}_L}{dt} d\tau}_{=\dot{q}_L(t)} - \frac{2}{\pi} \int_0^t \sum_{v=1}^{\infty} \frac{d\dot{q}_L}{dt} \frac{(-1)^v}{v} \exp[-ak_v^2(t-\tau)] \sin[k_v x] d\tau$$

$$= -\frac{x}{L} \dot{q}_L(t) - \frac{2}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \int_0^t \left(-2c_1 c_2 (\tau - \frac{T}{2}) \exp[-c_2(\tau - \frac{T}{2})^2] \right) \frac{(-1)^v}{v} \exp[-ak_v^2(t-\tau)] \sin[k_v x] d\tau$$

$$= -\frac{x}{L} \dot{q}_L(t) + c_1 c_2 \frac{4}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v} \sin[k_v x] \underbrace{\int_0^t (\tau - \frac{T}{2}) \exp[-c_2(\tau - \frac{T}{2})^2 - ak_v^2(t-\tau)] d\tau}_{=: I(v,t)}$$

$$\dot{q}_x(x,t) = -\frac{x}{L} \dot{q}_L(t) + c_1 c_2 \frac{4}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v} I(v,t) \sin(k_v x). \quad (B3-10)$$

Das Integral $I(v,t)$ löst man am bequemsten mithilfe einer Integraltafel, z.B. [1.17], S. 109, Kap. 3.3, Integral-Nr. 2.
Das Ergebnis ist im folgenden unter (B3-13) notiert.

Entsprechend dem FOURIER'schen Wärmeleitensatz folgt aus (B3-10) durch Integration die (verläufige) Lösung

$$\begin{aligned} \vartheta(x,t) &= -\frac{1}{\lambda} \int_0^x \dot{q}_x(x^*,t) dx^* + \vartheta(0,t) \\ &= -\frac{\dot{q}_L(t)}{\lambda L} \int_0^x x^* dx^* - \frac{c_1 c_2}{\lambda} \frac{4}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v} I(v,t) \int_0^x \sin(k_v x^*) dx^* + \vartheta(0,t) \\ &= \frac{L}{\lambda} \frac{\dot{q}_L(t)}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{c_1 c_2}{\lambda} \frac{4}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v} \underbrace{\frac{L}{v\pi}}_{=\frac{1}{k_v}} I(v,t) (\cos(k_v x) - 1) + \vartheta(0,t) \\ &= \frac{L}{\lambda} \left[\frac{\dot{q}_L(t)}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^2 + c_1 c_2 \frac{4}{\pi^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v^2} I(v,t) (\cos(k_v x) - 1) \right] + \vartheta(0,t). \end{aligned}$$

Zu dabei auftretende Randtemperatur $\vartheta(0,t)$ ermitteln wir durch folgende Gesamtwärmebilanz auf Ω im Zeitintervall $[0,t]$:

$$\underbrace{\int_0^t q_L(\tau) d\tau}_{\text{Im Zeitintervall } [0,t)} = \underbrace{g_C \int_0^L (S(x,t) - \underbrace{S(x,0)}_{= S_0}) dx}_{\text{In } \Omega \text{ zum Zeitpunkt } t \text{ ge-} \text{ Spezifische Enthalpie}}$$

(Man beachte (1-4): $\frac{-g_C}{\lambda} = \frac{1}{a}$)

$$c_1 \int_0^t \exp \left[-c_2 \left(\tau - \frac{T}{2} \right)^2 \right] d\tau - c_3 t = \frac{L}{a} \left[\frac{q_L(t)}{2L^2} \int_0^L x^2 dx + c_1 c_2 \frac{4}{\pi^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v^2} \int_0^L (\cos(k_v x) - 1) dx \right] + g_C (S(L,t) - S_0) L$$

$$\frac{c_1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{c_2}} \operatorname{erf} \left[-\sqrt{c_2} \frac{T}{2}, \sqrt{c_2} \left(t - \frac{T}{2} \right) \right] - c_3 t =$$

$$= \frac{L}{a} \left[\frac{q_L(t)}{2L^2} \int_0^L x^2 dx + c_1 c_2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v^2} \int_0^L (\cos(k_v x) - 1) \left(\frac{1}{k_v} \sin(k_v L) - L - \frac{1}{k_v} \sin(k_v \cdot 0) \right) dx + \lambda (S(L,t) - S_0) \right]$$

Damit lautet die Raumtemperatur (B3-11)

$$S_0(x,t) = \frac{a}{\lambda L} \left(\frac{c_1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{c_2}} \operatorname{erf} \left[-\sqrt{\frac{T}{2}}, \sqrt{\frac{T}{2}} \left(t - \frac{L}{2} \right) \right] - c_3 t \right) + \frac{L}{\lambda} \left(-\frac{q_L(0)}{6} + c_1 c_2 \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} I_n(t) \right) + S_0,$$

und wir erhalten die Lösung zu

$$S_0(x,t) = \frac{L}{\lambda} \left[\frac{q_L(0)}{2} \left(\left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) + c_1 c_2 \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} I_n(t) \cos \left[k_n x \right] \right] + \quad \text{(B3-12)}$$

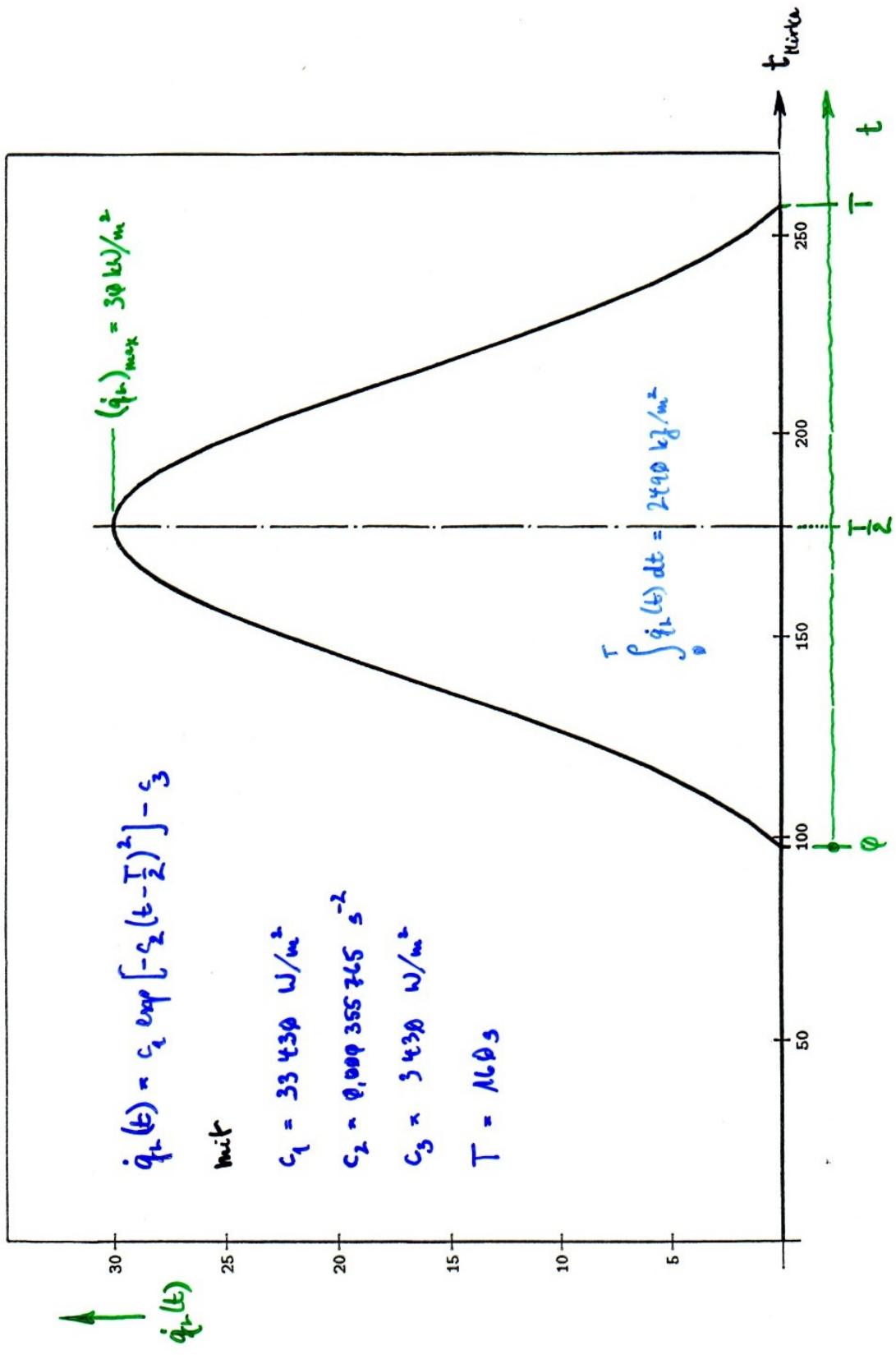
$$+ \frac{a}{\lambda L} \left(\frac{c_1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{c_2}} \operatorname{erf} \left[-\sqrt{\frac{T}{2}}, \sqrt{\frac{T}{2}} \left(t - \frac{L}{2} \right) \right] - c_3 t \right) + S_0 \quad \text{für } \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T)$$

$$\text{mit } I_n(t) = \frac{1}{2c_2} \left(\exp \left[-ak_n^2 t - c_2 \frac{T^2}{4} \right] - \exp \left[-c_2 \left(t - \frac{L}{2} \right)^2 \right] \right) + \quad \text{(B3-13)}$$

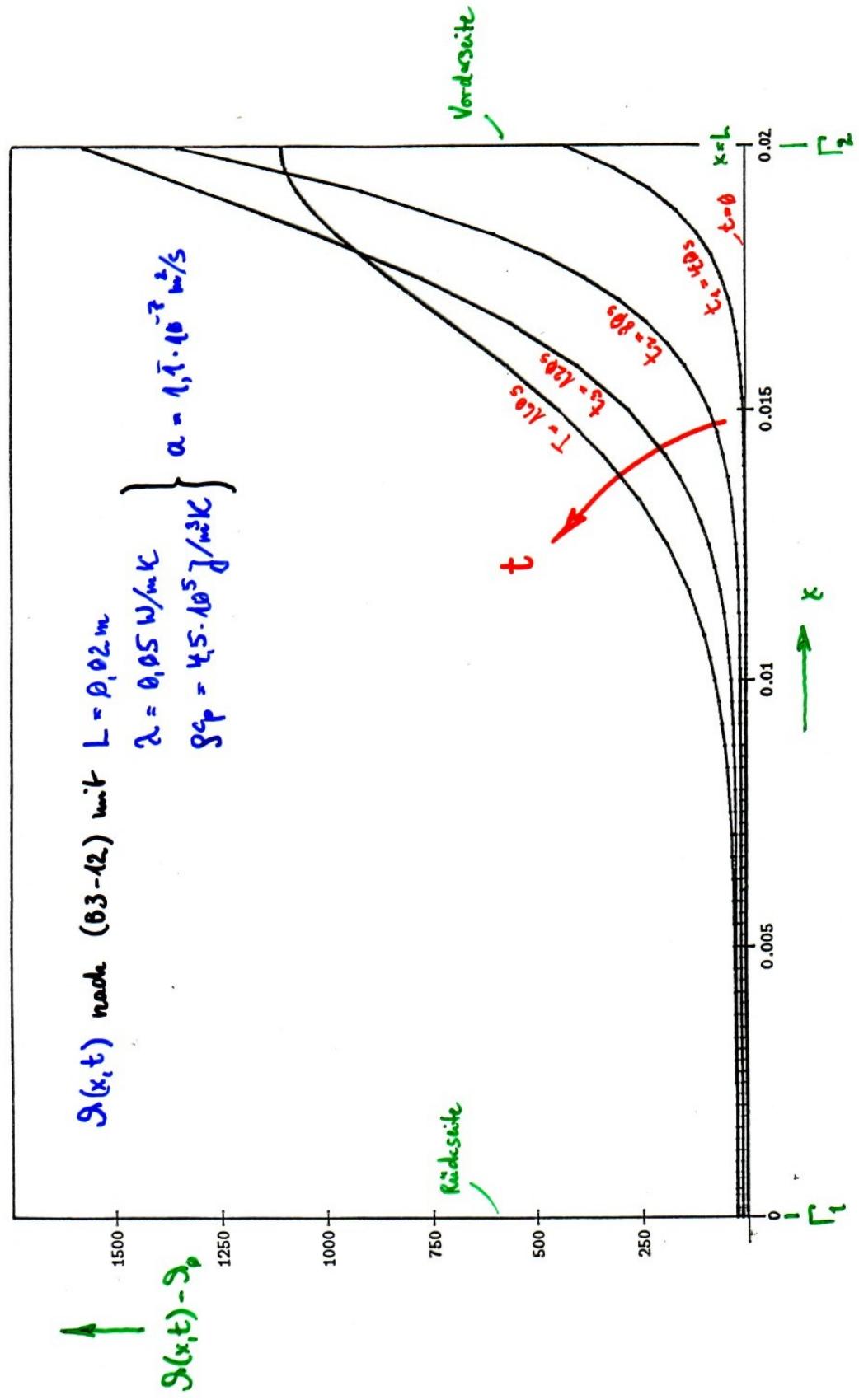
$$+ \frac{a}{4} k_n^2 \sqrt{\frac{\pi}{c_2^3}} \exp \left[\frac{a}{4c_2} k_n^2 \left(ak_n^2 - 4c_2 \left(t - \frac{L}{2} \right) \right) \right] \operatorname{erf} \left[\frac{a}{2\sqrt{c_2}} k_n \sqrt{-c_2 \left(t - \frac{L}{2} \right)}, \frac{a}{2\sqrt{c_2}} k_n^2 + \sqrt{\frac{T}{2}} \right],$$

$$k_n = n\pi/L \quad . \quad \text{(B3-6)}$$

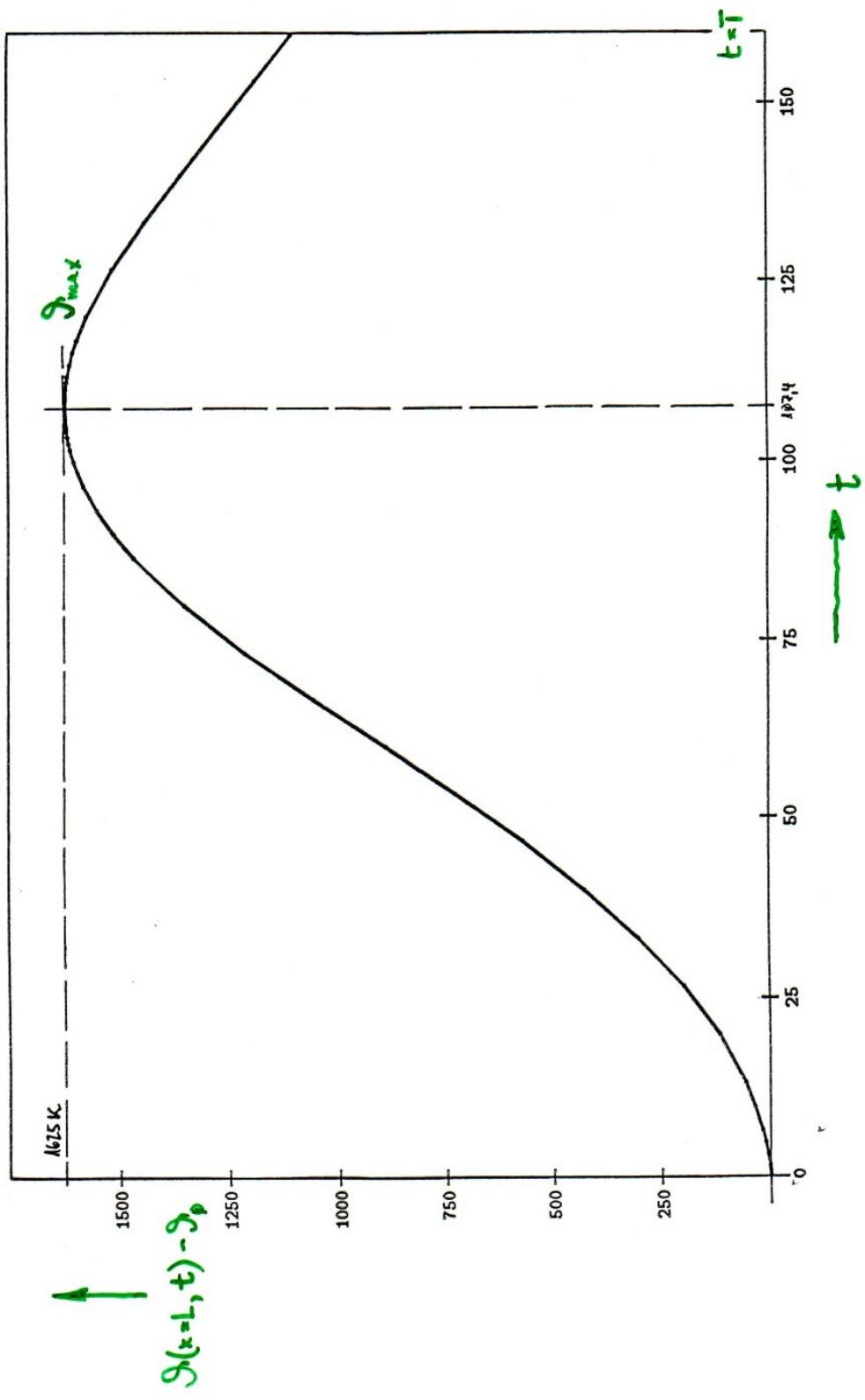
Büngelungskes Wärmestrom (§3-3) entsprechend RS (§3-2.2)



Temperaturverteilung $\vartheta(x, t_i)$ für verschiedene Zeiten $t_i \in [0, T]$



Temperaturentwicklung auf der Vorderseite (Γ_1) für $t \in [0, T]$



Temperaturverteilung auf der Röhreseite (Γ_1) für $t \in [0, T]$

